# Тема "Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, за квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред $n$, характеристичният и полином е

$$f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})x^{n-1} + ... + \det(A)$$

Също по определение, корените на $f_A(x) = 0$ се наричат характеристични корени на $A$.

Твърдим, че матрици $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B = T^{-1}AT \in M_{n\times n}(F)$ са подобни, ако характеристичните им полиноми съвпадат.

**Доказателство:** Понеже $xE_n = x(T^{-1}E_nT) = T^{-1}(xE_n)T$, то $f_B(x) = \det(B - xE_n) =$
$= \det\left(T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T\right) = \det\left(T^{-1}(A - xE_n)T\right) = \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) =$
$= \det(T^{-1}T)f_A(x) = f_A(x).$ □

По определение, за линеен оператор $\varphi : V \to V$, собствен вектор е вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ за който $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$. $\lambda$ е собствена стойност на $\varphi$ (отговаряща на собствения вектор $v$).

Твърдим, че собствените стойности на линеен оператор в крайномерно пространство съвпадат с характеристичните корени на оператора.

**Доказателство:** Разглеждаме линейно пространство $V$ над поле $F$ с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$. За произволен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathcal{O}_{n\times 1}\}$ спрямо базиса $e$, е изпълнено $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax)$ (матрична форма на линейността на изображение и определение за матрица на линеен оператор). То тогава, $v$ е собствен вектор на $\varphi$ със собствена стойност $\lambda \iff e(Ax) = \varphi(v) = \lambda v = \lambda(ex) = e(\lambda x)$ (свойства на умножение на матрици със скалар). Това е еквивалентно на $Ax = \lambda x = \lambda(E_nx) = (\lambda E_n)x$ и е в сила точно когато $(A - \lambda E_n)x = Ax - (\lambda E_n)x = \mathcal{O}_{n\times 1}$ има ненулево решение за $x$. Това е равносилно на $0 = \det(A - \lambda E_n) = f_A(\lambda)$. Тоест $\lambda$ е собствена стойност $\iff$ $\lambda$ е характеристичен корен. □

Твърдим, че за линейно пространство $V$, системата вектори, отговарящи на независимите собствени стойности на линеен оператор, е линейно независима.

**Доказателство:** Ще го докажем с индукция по броя $n$ на собствените стойности $\lambda_1, ..., \lambda_n$ на линеен оператор $\varphi : V \to V$.

*База:* Няма какво да се доказва

*Индукционна стъпка:* Разглеждаме $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. От $\varphi(v_{i,j}) = \lambda_i v_{i,j}$ и $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_V) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, получаваме $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}\lambda_i v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. Умножаваме първоначалното разглеждано по $-\lambda_n$ и прибавяме към второто: $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n)v_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n)v_{i,j}$. От Индукционно предположение, $\{v_{i,j} \mid 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le k_i\}$ е линейно независима, тоест $\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{1, ..., k_i\}$. Имайки се предвид, че за $\forall i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{1, ..., k_i\}$: $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$, то $\mu_{i,j} = 0$. Тогава

$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. От линейната независимост на $v_{n,1}, ..., v_{n,k_n}$, то $\mu_{n,j} = 0 \; \forall j \in \{1, ..., k_n\}$. □

По определение, спектърът на матрица е множеството от характеристични корени на матрицата. Тя има просто спектър, ако има толкова характеристични корена, колко е размера и.

Също по определение, спектърът на линеен оператор в $n$-мерно пространство е множеството на характеристичните му корени. Линейният оператор има прост спектър, ако има точно $n$ на брой характеристични корени.

Твърдим, че за линеен оператор с прост спектър съществува базис в който матрицата на оператора е диагонална. Еквивалентно съществува базис съставен от собствени вектори.

**Доказателство:** Разглеждаме пространство $V$ над поле $F$ с линеен оператор $\varphi : V \to V$ и $n$ различни характеристични корена $\lambda_1, ..., \lambda_n \in F$. От минало твърдение, следва че $\lambda_1, ..., \lambda_n$ са собствени стойности. Съответстващите на тях собствени вектори $v_1, ..., v_n$ са линейно независими (миналото твърдение) и са базис на $V$ (твърдение). Имайки предвид, че $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, матрицата на $\varphi$ в базиса $v_1, ..., v_n$ е диагонална (и диагоналните елементи са равни на собствените стойности). □

Твърдим, че за матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ с прост спектър, съществува $T \in M_{n\times n}(F)$, такава че $D = T^{-1}AT$ е дагонална.

**Доказателство:** Разглеждаме пространство $V$ над поле $F$ с базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица $A$ спрямо базиса $e$. Тогава $\varphi$ има прост спектър и от миналата теорема, съществува базис $v = (v_1, ..., v_n)$ в който матрицата на $\varphi$ е диагонална. Матрицата на прехода $T$ от базиса $e$ към базиса $v$ е обратима и $T^{-1}AT$ е диагонална. □

По определение, за пространство $V$, нейно подпространство $W$ е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.

Твърдим, че за линейно пространство $V$ над поле $F$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$, множеството $U_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ е $\varphi$-инвариантно подпространство на $V$. Ако $\lambda$ е собствена стойност, то $U_\lambda$ е обединението на собствените вектори (отговарящи на $\lambda$). Иначе, ако $\lambda$ не е собствена стойност, то $U_\lambda = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.

**Доказателство:** $U_\lambda$ е подпространство на $V$, защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda, \; \mu \in F$ е изпълнено $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$ от $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2)$ и $\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = \mu(\lambda u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1)$. За произволен вектор е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$, следователно $U_\lambda$ е $\varphi$-инвариантно. □

Твърдим, че за линейно пространство $V$ и линеен оператор $\varphi : V \to V$, неин ненулев вектор $v$ поражда 1-мерно $\varphi$-инвариантно подпространство $l(v)$ на $V$ тогава и само тогава, когато $v$ е собствен вектор на $\varphi$.

**Доказателство:** ($\Rightarrow$) Ненулевият вектор $v$ се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и следователно $v$ е собствен вектор (отговарящ на $\lambda$).

($\Leftarrow$) Произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in l(v)$ и 1-мерното пространство на $l(v)$ е $\varphi$-инвариантно. □

Без доказателство, твърдим че за непостоянен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x]\backslash\mathbb{C}$, всички корени са комплексни числа. (Основна Теорема на алгебрата)